Thiago M. Guimarães

Apêndice

Aqui vou mostrar uma forma mais precisa de se demonstrar o potencial U a partir de uma força conservativa. Como nossa força conservativa depende apenas do ponto inicial e final, quando tomamos a integral de linha da força sobre uma curva fechada C, temos

$$\oint_C \vec{F} dt = 0 \tag{1}$$

pelo teorema de Stokes podemos relacionar nossa integral de linha com a integral de superfície:

$$\oint_C \vec{F} dt = \int_S (\nabla \times \vec{F}) d\vec{s} = 0 \tag{2}$$

onde S é uma superfície delimitada pela curva fechada C. Com isso, podemos ver que:

$$\nabla \times \vec{F} = 0 \tag{3}$$

Isso significa que $\vec{F}$ é irrotacional, o que sugere que a força conservativa possa ser escrita como o gradiente de algum potencial escalar, uma vez que gradientes são irrotacionais.

$$\nabla \times \vec{F} = \nabla \times (\nabla U) = 0 \tag{4}$$

Assim podemos definir a força como:

$$\vec{F} = \nabla U \tag{5}$$

Onde escolhemos convenientemente uma constante multiplicativa -1, e temos:

$$\vec{F} = -\nabla U \tag{6}$$

Sendo o gradiente de U:

$$\nabla U = \frac{\partial U}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\hat{k} \tag{7}$$

Como estamos trabalhamos apenas em x:

$$\vec{F}(x) = -\frac{\partial U}{\partial x}\hat{i} \tag{8}$$

exatamente como tinhamos definido anteriormente.

O sinal negativo que escolhemos convênientemente garante que um corpo ganhe energia potencial a medida que é suspenso e que quando solto haja sobre ele uma força direcionada para baixo, por exemplo.