Comentário Inicial

O aluno que sai do primeiro ano de graduação, após ter contato com física geral 1, quase sempre tem seu aprendizado fracionado, não sabendo estabelecer uma relação clara entre os conceitos da dinâmica e da cinemática a partir da utilização do cálculo diferencial e integral aprendido nesse mesmo ano. Portanto resolvi abordar uma seção de textos voltados para esses graduandos, tanto de física quanto de engenharia, para tratar esses conceitos importantes. Aqui tentaremos mostrar a relação entre forças, energia, momento e as equações que descrevem a cinemática dos corpos, tudo a partir da força aplicada sobre o corpo. Também tentaremos abordar algumas situações de interesse físico, como o oscilador harmônico simples e o potencial de Lennard Jones.

Forças que dependem do tempo

Uma das primeiras coisas que aprendemos no curso de física geral é a descrição cinemática do movimento dos corpos, inicialmente trabalhamos com movimentos não acelerados e depois passamos a trabalhar com caso em que há aceleração constante no sistema. Porém apenas algum tempo depois descobrimos que a origem dessa aceleração está na força resultante atuando sobre o corpo. Com isso podemos ver que há uma relação direta entre essa força que atua no corpo e suas funções horárias do espaço e da velocidade, podemos pensar ainda mais adiante e buscar relações da força com a energia mecânica do corpo.

Primeiramente temos que saber que força não é tudo igual, pois na mecânica uma força pode depender da velocidade, do tempo e da posição, ou seja: $F(x, \dot{x}, t)$. Essas forças possuem características interessantes e delas podemos demonstrar coisas algumas coisas de suma importância para a o entendimento da mecânica. Note também que as forças na natureza não são necessariamente constantes como estamos acostumados a trabalhar com elas inicialmente.

A partir das forças que dependem do tempo nós podemos demonstrar a conservação do momento linear de forma simples usando apenas integrais. Considere que a nossa força F seja dependente do tempo, isto é $F(t)$. Como é visto nas leis de Newton $F(t) = ma$ e sabendo também que $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$, temos:

$$F(t) = m\frac{dv}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2} \tag{1}$$

Muito provavelmente quem teve um bom curso de física 1 deve ter visto a equação (1), porém dificilmente trabalharam com ela. Essa equação é muito importante e reveladora, pois nela podemos ver a origem daquela aceleração em cinemática. Mas teria alguma forma de relacionarmos a equação da força com as equações horárias do espaço e da velocidade? A resposta é sim, e é extremamente importante que o graduando tenha essa noção o mais cedo possível. A equação (1) nos dá justamente a relação entre a força e função horária dos espaços e também das velocidades. Para resolvê-la é simples e temos algumas surpresas interessantes no caminho. Primeiramente vamos encontrar a velocidade:

$$F(t) = m\frac{dv}{dt} \tag{2}$$

Para encontrarmos uma função horária da velocidade basta integrar a equação (2) em relação a dt:

$$\int_0^t F(t\text{'})dt\text{'} = m \int \frac{dv}{dt} \tag{3}$$

dessa forma

$$\int_0^t F(t\text{'})dt\text{'} = m \int_{v_0}^{v} dv \tag{4}$$

finalmente:

$$\int_0^t F(t\text{'})dt\text{'} = m(v - v_0) \tag{5}$$

onde sabemos que $m(v - v_0) = mv - mv_0 = p_2 - p_1 = \Delta$, assim:

$$\int_0^t F(t\text{'})dt\text{'} = \Delta p \tag{6}$$

Isso significa muita coisa! Primeiramente nos diz que a variação do momento linear é a integral da força por dt, que chamamos de impulso. Em segundo lugar diz que se a força que age sobre o corpo for nula teremos a conservação do momento linear e com isso podemos ver também que a força pode ser definida como $F(t) = \frac{dp}{dt}$, mostrando a relação intrínseca da força com o momento linear do corpo. É de suma importância que você saia do primeiro ano sabendo isso!

Se considerarmos constante a força que atua sobre o corpo conseguimos resultados mais familiares:

$$F \int_0^t dt\text{'} = m(v - v_0) \tag{7}$$

$$F(t - t_0) = m(v - v_0) \tag{8}$$

$$F\Delta t = \Delta p \tag{9}$$

onde vemos claramente a equação do impulso como você a conheceu inicialmente. Dessa mesma forma conseguimos mais alguns resultados interessantes. Vamos isolar a velocidade para força constante na equação (8), da seguinte forma:

$$F(t - t_0) = m(v - v_0) \tag{10}$$

$$\frac{F}{m} \int_0^t dt\text{'} = v - v_0 \tag{11}$$

isolando v e fazendo $(t - t_0) = t$, pois $t_0 = 0$,temos:

$$v = v_0 + \frac{F}{m}t \tag{12}$$

como $F(t) = ma$:

$$v = v_0 + at \tag{13}$$

que é a função horária da velocidade pra o movimento acelerado e a partir dela podemos facilmente encontrar a função horário do espaço:

Sabemos que $v = \frac{dx}{dt}$ temos:

$$\frac{dx}{dt} = v_0 + at \tag{14}$$

multiplicando ambos os lados pelo elemento diferencial dt, temos:

$$dx = v_0 dt + atdt \tag{15}$$

integrando, temos:

$$\int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} v_0 dt + a \int_{t_0}^{t} tdt \tag{16}$$

finalmente temos a nossa função horária do espaço:

$$x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2} at^2 \tag{17}$$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2 \tag{18}$$

com isso cumprimos uma de nossas metas.

Voltando a equação (3) vemos que ela é uma equação diferencial de segunda ordem, sua solução deve ser única, ou seja, o corpo evolui no tempo de forma unívoca, tendo como condições iniciais v_0 e x_0, dessa forma as soluções que encontramos satisfazem a (3). O que foi demonstramos acima é de suma importância que seja obvio para graduandos que estão terminando de cursar o primeiro ano.

Para o caso de forças variáveis, que será de seu interesse em um futuro próximo, nós chegaríamos as seguintes equações:

Partindo da equaão (5), como a força varia em relação ao tempo, não podemos mais tirá-la da integral ficando assim

$$\frac{1}{m} \int_{0}^{t} F(t')dt' = v - v_0 \tag{19}$$

Isolando v temos

$$v = v_0 + \frac{1}{m} \int_{0}^{t} F(t')dt' \tag{20}$$

e para a função horária do espaço temos:

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{m} \int_{0}^{t} \left[\int_{0}^{t} F(t')dt' \right] dt'' \tag{21}$$

Forças variáveis nos dão muitas vezes trajetórias interessantes para o movimento de corpos, por isso encorajo você a descobrir a trajetória para um corpo sujeito a força $F(t) = F_0 cos\omega t$.

Forças que dependem da posição

Para forças que dependem da velocidade os casos mais clássicos são os de forças de atrito, porém nesse texto não iremos abordá-las. Já forças que dependem da posição são de nosso interesse, pois a partir delas podemos ver claramente a conservação de energia e também compreender o oscilador harmônico simples.

Considere a seguinte força que depende da posição:

$$F(x) = m\frac{dv}{dt} \tag{22}$$

Nós temos agora o seguinte problema, a força é uma função espacial, enquanto do outro lado da igualdade temos um elemento diferencial da velocidade e do tempo, precisamos descobrir honestamente um elemento diferencial espacial, para que assim possamos integrar corretamente. Fazemos:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} \tag{23}$$

e como é evidente:

$$\frac{dx}{dt} = v \tag{24}$$

assim temos:

$$F(x) = mv\frac{dv}{dx} \tag{25}$$

e podemos integrar sem medo algum:

$$\int_{x_0}^{x} F(x')dx' = m\int_{v_0}^{v} vdv \tag{26}$$

resolvendo a integral temos:

$$\int_{x_0}^{x} F(x')dx' = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 \tag{27}$$

como você pode facilmente ver, encontramos a variação da energia cinética de um corpo que esteja sobre a ação dessa força. Assim podemos deixar duas coisas bem claras, a primeira é que a variação da energia cinética é chamada de trabalho, logo

$$\int_{x_0}^{x} F(x')dx' = W \tag{28}$$

Caso a força seja constante caímos na equação trivial para o trabalho:

$$F\Delta x = W \tag{29}$$

A segunda coisa é um pouco menos trivial de se ver. A integral $\int_{x_0}^{x} F(x')dx'$, representa uma força que atua por todo a trajetória do corpo, desde seu ponto inicial x_0 e seu ponto final x. Podemos separar esse caminho em duas em duas partes a partir de um ponto de referência x_{ref}, no qual temos:

$$\int_{x_0}^{x} F(x')dx' = \int_{x_0}^{x_{ref}} F(x')dx' + \int_{x_{ref}}^{x} F(x')dx' \tag{30}$$

se isso não for familiar para você dê uma olhada em seu livro de cálculo.

Quando tomamos a integral da força pelo elemento diferencial dx, como sendo a variação da energia cinética podemos fazer:

$$\int_{x_{ref}}^{x} F(x')dx' = -U(x) \tag{31}$$

Onde $U(x)$ é energia potencial do corpo.

Sabendo que:

$$\int_{x_0}^{x_{ref}} F(x')dx' = -\int_{x_{ref}}^{x} F(x')dx' \tag{32}$$

temos:

$$\int_{x_0}^{x_{ref}} F(x')dx' = U(x_0) \tag{33}$$

então finalmente encontramos:

$$\int_{x_0}^{x} F(x')dx' = U(x_0) - U(x) \tag{34}$$

Agora,igualando com energia cinética temos:

$$U(x_0) - U(x) = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 \tag{35}$$

Rearranjando:

$$U(x_0) + \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + U(x) \tag{36}$$

e podemos expressar da seguinte forma:

$$E_M = \frac{1}{2}mv^2 + U(x) \tag{37}$$

onde $E_M = U(x_0) + \frac{1}{2}mv_0^2$. Essa equação representa a conservação de energia mecânica total de um corpo, sendo assim não há variação dessa energia no decorrer do tempo, logo:

$$\frac{dE_M}{dt} = 0 \tag{38}$$

mostrando que a energia é um constante de movimento, obviamente para casos onde há forças dissipativas sobre atuando sobre o corpo isso não ocorre.

Aqui mostramos um dos conceitos mais importantes que temos em mecânica, que é a conservação da energia mecânica do corpo a partir de uma força que atua sobre o corpo. Portanto temos mais ponto da nossa tarefa cumprido.

Essa conservação de energia nos permite encontrar a velocidade e a posição do corpo, porém elas agora não parecerão tão familiares mais. Fazendo

$$\frac{1}{2}mv^2 = E_M - U(x) \tag{39}$$

Isolando v, temos:

$$v = \pm\left[\frac{2}{m}(E_M - U(x))\right]^{\frac{1}{2}} \tag{40}$$

considerando novamente $v = \frac{dx}{dt}$ temos:

$$\frac{dx}{dt} = \pm\left[\frac{2}{m}(E_M - U(x))\right]^{\frac{1}{2}} \tag{41}$$

multiplicando ambos os lados por dt:

$$dx = \pm \left[\frac{2}{m}(E_M - U(x))\right]^{\frac{1}{2}} dt \tag{42}$$

sabemos que $(E_M - U(x))$ possui dependência espacial, portanto:

$$\pm \frac{dx}{[E_M - U(x)]^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{\frac{2}{m}}dt \tag{43}$$

integrando mais uma vez encontramos a equação que descreve a trajetória do corpo:

$$\pm \int_{x_0}^{x} \frac{dx'}{[E_M - U(x)]^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{\frac{2}{m}}t \tag{44}$$

De tudo que foi exposto acima, vimos claramente como obter as equações da cinemática a partir de uma força constante, vimos também uma demonstração simples e correta sobre a conservação de energia. Se você chegou até compreendendo tudo que foi feito, nós demos um grande passo, parabéns.

Vou encerrar esse primeiro texto por aqui, para não ficar muito grande, nos próximos abordarei o oscilador harmônico simples, fazendo um tratamento voltado para sua energia e também abordaremos o potencial de Lennard Jones.No terceiro texto tentarei abordar forças conservativas e teoremas de conservação.

Bibliografia

Barcelos Neto, j - Mecânica Newtoniana, Lagrangiana e Hamiltoniana.
Symons K.R - Mechanics vol 1
Kazunori W. - Mecânica Clássica vol 1.

Thiago M. Guimarães