Thiago M. Guimarães

Comentário Inicial

Agora que já sabemos relacionar a força e a energia de forma primária, chegou à hora de entendermos melhor como trabalhar com a energia potencial. Para deixar nosso tratamento mais simples e interessante, necessitamos abordar as forças conservativas.

Forças conservativas

Forças conservativas são aquelas que seu trabalho não depende da trajetória, mas apenas dos pontos inicial e final. Isso significa que a integral de linha ao longo de qualquer caminho escolhido, ligando esses dois pontos, tem sempre o mesmo valor, assim a força dependente unicamente do vetor posição do corpo, $\vec{r}$.Essa é uma severa condição para que uma força seja conservativa(!).

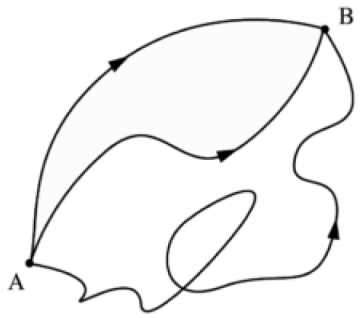

Figura 1: a figura mostra três possíveis caminho ligando A e B.

Antes de definir mais precisamente a energia potencial você deve se atentar que ela é, nesse caso, apenas dependente da posição do corpo, ou seja, ela é uma função de x, y e z, que vetorialmente pode ser dado pelo vetor posição $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$. Assim essa energia potencial irá variar de acordo com a posição espacial que o corpo ocupa, acarretando também uma variação na energia cinética do corpo, uma vez que pela conservação de energia temos a relação $E_M = E_C + U(x)$, em que $E_C = \frac{1}{2}mv^2$.

Juntando o que definimos acima com o que vimos na parte 1 desse texto, podemos escrever a relação da energia potencial e trabalho com a força da seguinte forma, considerando apenas em x para simplificar a situação:

$$\int_{x_0}^{x} F(x')dx' = -U(x) = -W \tag{1}$$

ou seja, a energia potencial é menos o trabalho realizado pela força $\vec{F}$ quando o corpo se move desde o ponto de referencia x_0 até o ponto x. Cabe aqui fazer algumas considerações sobre o ponto x_0, esse ponto é escolhido para se evitar constantes aditivas no problema, por esse motivo tomamos um ponto x_0 onde o potencial seja nulo, $U(x_0) = 0$, logo abaixo falaremos novamente sobre isso quando estivermos tratando do gráfico da energia potencial.

Também é interessante você se perguntar o que aconteceria se o trabalho não fosse independente do caminho escolhido, nesse caso a integral teria valores diferentes e a energia potencial não poderia ser definida univocamente. Partindo disso e da equação (1) podemos encontrar facilmente a força $F(x)$:

$$F(x) = -\frac{dU(x)}{dx} \tag{2}$$

A equação (2) só pode ser escrita se e somente se a força for conservativa. Note que nesse caso se considerássemos uma energia potencial $U(x_0) \neq 0$, a equação (2) nos daria:

$$F(x) = -\frac{dU(x)}{dx} + \frac{dU(x_0)}{dx} = -\frac{dU(x)}{dx} \tag{3}$$

Isso significa que um potencial $U(x_0) \neq 0$ não contribui em nada para a força que age sobre o corpo, pois ele é uma constante.

Outro aspecto importante da força conservativa é que a energia mecânica $E_M = E_C + U$ se conserva para quaisquer pontos arbitrários da trajetória da partícula. Ou seja, quando um corpo está sob a ação de uma força resultante conservativa sua energia mecânica é sempre constante.

Agora vamos analisar o gráfico da energia potencial. A equação da energia potencial mais simples que conhecemos é $U = mgx$, nesse caso a força que atua sobre o corpo é a da gravidade. Graficamente o potencial gravitacional é dado por uma reta devido ao caráter linear da equação:

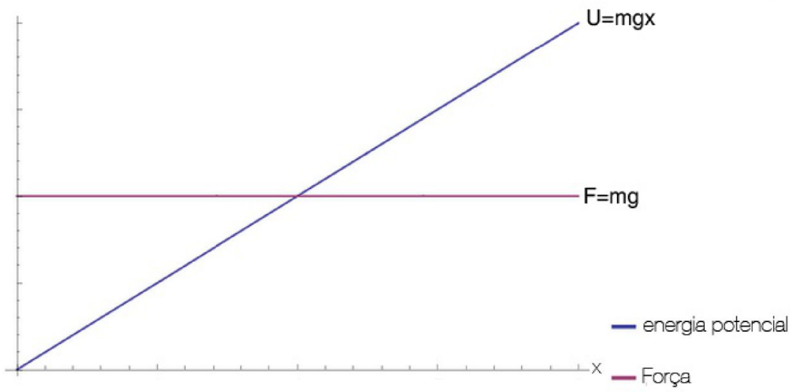

Figura 2: a imagem mostra a sobreposição do gráfico da força e da energia potencial

Como vimos anteriormente, nós podemos descobrir facilmente a força que atua sobre um corpo conhecendo seu potencial, nesse caso temos:

$$F(x) = -\frac{dU}{dx} = mg\frac{dx}{dx} = -mg \tag{4}$$

Essa é exatamente a força peso que atua sobre o corpo. Esse é o momento de falarmos a ultima vez sobre $U_0 \neq 0$, se tivessemos o pontecial $U_0 \neq 0$ nosso gráfico apenas estaria deslocado para cima, sendo totalmente irrelevante para nossa análise, uma vez que a força e forma do potencial seriam os mesmos.

Abordando agora um potencial elástico, $U(x) = \frac{1}{2}kx^2$, temos uma parábola:

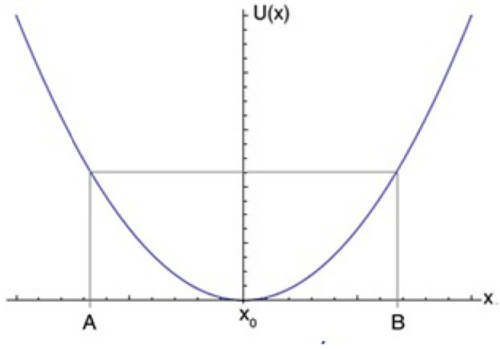

Figura 3: Energia potencial elástica.

Se derivarmos esse potencial iremos encontrar a força elástica:

$$F(x) = -\frac{dU}{dx} = \frac{k}{2}\frac{dx^2}{dx} = -kx \tag{5}$$

Vamos fazer uma analise desse potencial. Repare que em $x = x_0$ temos um ponto de inflexão no gráfico, ou seja:

$$\left(\frac{dU(x)}{dx}\right)_{x_0} = -F = 0 \tag{6}$$

Isso mostra claramente que a força que atua no corpo nesse ponto é nula, com isso conseguimos ver que se um corpo for colocado naquele ponto, ele permanecerá lá, pois nenhuma força age sobre ele, porém se ele for deslocado um pouco para qualquer um dos dois lados aparecerá sobre ele uma força restauradora que tentará trazê-lo de volta a posição de equilíbrio, por esse motivo dizemos que quando o corpo está no ponto de potencial mínimo ele está em equilíbrio estável. Sobrepondo o gráfico da força com o potencial temos:

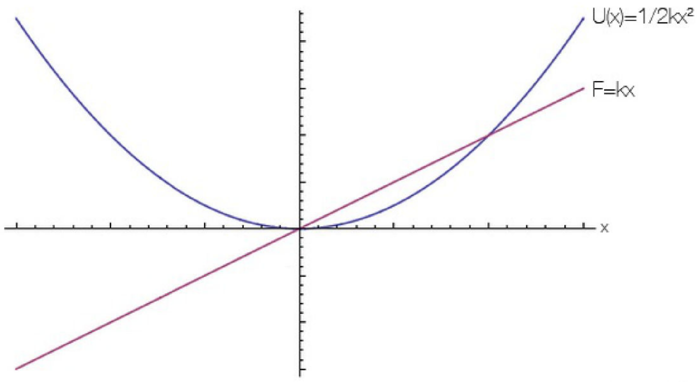

Figura 4: Sobreposição dos gráficos da força elástica e energia potencial elástica.

Oscilador harmônico simples

Partindo desse exemplo podemos tratar o oscilador harmônico simples. Como acabamos de ver, se deslocarmos até o ponto B um corpo que está inicialmente em repouso no ponto de equilíbrio estável x_0, aparecerá uma força restauradora $F = -kx$ sobre ele, essa força tentará trazer o corpo de volta a posição de equilíbrio, mas vejamos: quando deslocamos o corpo até o ponto B ele estará em uma posição onde existe energia potencial sobre ele, a medida que força restauradora coloca esse corpo em movimento para tentar trazê-lo ao ponto de equilíbrio sua energia potencial vai dando lugar a energia cinética, até que no ponto de equilíbrio o potencial será mínimo e a energia cinética será máxima fazendo com que o corpo consiga passar por ele e chegue até o ponto A ,que tem o mesmo potencial de B, caso não haja dissipação de energia no sistema o corpo ficará oscilando entre essas duas posições de A e B, chamamos isso de oscilação harmônica.

É possível encontrarmos uma equação que descreva o movimento do corpo utilizando a equação (5)? Sim e é exatamente esse nosso interesse agora.

Sabemos que a força é dada por $F = ma = m\frac{d^2x}{dt^2}$, igualando a (5) temos:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \tag{7}$$

então

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \tag{8}$$

Para simplificar nossa notação chamaremos $\frac{d^2x}{dt^2}$ de $\ddot{x}$:

$$m\ddot{x} + kx = 0 \tag{9}$$

A equação (9) é uma equação diferencial de segunda ordem que provavelmente você não deve ter afinidade alguma, mas tentarei mostrar uma forma simples de resolver ela para que obtenhamos uma solução $x(t)$ satisfatória. Primeiro passo dividimos a equação (9) por m:

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \tag{10}$$

onde você deve se lembrar que $\frac{k}{m}$ é a nada mais do que a freqüência angular ao quadrado, ω_0^2, então:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \tag{11}$$

Como nossa proposta aqui é demonstrar as equações e conservações a partir da força, não há muito que possamos fazer, teremos que resolver a equação diferencial. Mas não se desespere, equações diferenciais dessa forma possuem uma solução com formato conhecida, ou seja, essa equação possui a seguinte solução:

$$x(t) = e^{pt} \tag{12}$$

e temos, uma característica importante da equação diferencial é que se somarmos duas solução linearmente independentes teremos uma nova solução válida, então

$$x(t) = C_1 e^{pt} + C_2 e^{-pt} \tag{13}$$

também é solução da equação (11), sendo C_1 e C_2 constantes arbitrárias.

Primeira coisa que temos que fazer é determinar a constante p, para isso derivamos duas vezes a solução (12) e depois substituímos na equação (11). Assim:

$$\ddot{x}(t) = p^2 e^{pt} \tag{14}$$

Substituindo a (12) e a (14) na equação (11):

$$p^2 e^{pt} + \omega_0^2 e^{pt} = 0 \tag{15}$$

$$(p^2 + \omega_0^2) e^{pt} = 0 \tag{16}$$

descartamos a hipótese de $e^{pt} = 0$, assim temos:

$$(p^2 + \omega_0^2) e^{pt} = 0 \tag{17}$$

$$p^2 = -\omega_0^2 \tag{18}$$

$$p = \sqrt{-\omega_0^2} = \pm i\omega_0 \tag{19}$$

Agora que encontramos o valor de p, podemos escrever a solução (13) da seguinte forma:

$$x(t) = C_1 e^{i\omega_0 t} + C_2 e^{-i\omega_0 t} \tag{20}$$

A expressão (20) nos diz a posição da partícula, mas ela necessita ser inteiramente real, para tanto teremos que utilizar alguns truques utilizando as constantes C_1 e C_2 para eliminarmos o número complexo i.

Primeiramente consideramos que C_2 seja o conjugado de C_1, então podemos escrevê-los em coordenadas polares da seguinte forma:

$$C_1 = a + ib = re^{i\theta} \tag{21}$$

e

$$C_2 = a - ib = re^{-i\theta} \tag{22}$$

Assim nossa solução fica:

$$x(t) = re^{i\theta} e^{i\omega_0 t} + re^{-i\theta} e^{-i\omega_0 t} \tag{23}$$

$$x(t) = r\left[e^{i(\omega_0 t + \theta)} + e^{-i(\omega_0 t + \theta)}\right] \tag{24}$$

Escrevendo na forma trigonométrica, temos:

$$\left[e^{i(\omega_0 t + \theta)} + e^{-i(\omega_0 t + \theta)}\right] = cos(\omega_0 t + \theta) + isen(\omega_0 t + \theta) + cos(\omega_0 t + \theta) - isen(\omega_0 t + \theta) \tag{25}$$

Substituindo na (24):

$$x(t) = r[cos(\omega_0 t + \theta) + isen(\omega_0 t + \theta) + cos(\omega_0 t + \theta) - isen(\omega_0 t + \theta)] \tag{26}$$

$$x(t) = 2rcos(\omega_0 t + \theta) \tag{27}$$

Sendo $2r = A$ a amplitude máxima do movimento do oscilador harmônico simples. A solução (27) é totalmente satisfatória para o que queremos, mas vamos mexer um pouco mais nela para facilitar encontrar a velocidade.

$$Acos(\omega_0 t + \theta) = Acos(\omega_0 t)cos\theta - Asen(\omega_0 t)sen\theta \tag{28}$$

Onde $Acos\theta$ e $Asen\theta$ são constantes que chamaremos de B_1 e $-B_2$, respectivamente. Nossa solução fica:

$$x(t) = B_1 cos(\omega_0 t) + B_2 sen(\omega_0 t) \tag{29}$$

Agora iremos derivar para encontrar a função da velocidade:

$$\frac{dx(t)}{dt} = v(t) = -B_1\omega_0 sen(\omega_0 t) + B_2\omega_0 cos(\omega_0 t) \tag{30}$$

Assim encontramos a função horária do espaço e da velocidade de um oscilador harmônico simples a partir da força que atua sobre ele. Graficamente podemos expressar a aceleração, a velocidade e o espaço percorrido pelo oscilador harmônico simples da seguinte maneira:

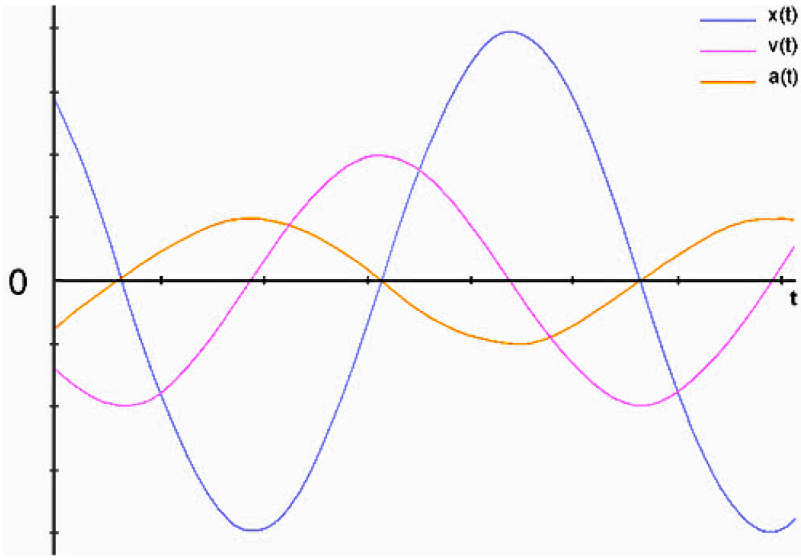

Figura 5: Sobreposição dos gráficos da força elástica e energia potencial elástica.

Termino aqui a segunda parte de nossa série de textos. Espero que tenha ficado bem claro para você o que é uma força conservativa e a relação entre energia potencial e força. No próximo abordaremos o potencial de Lennard-Jones e teoremas de conservação.

Referências Bibliográficas

[1] Barcelos Neto. j: Mecânica Newtoniana, Lagrangiana e Hamiltoniana.

[2] Symons K.R: Mechanics vol 1

[3] Kazunori W.: Mecânica Clássica vol 1.

[4] Nussenzveig H.M: Física Básica Vol 1.