Thiago M. Guimarães

Comentário Inicial

Esse é nosso ultimo post da seqüência de três posts sobre uma introdução a mecânica clássica para alunos do primeiro ano da graduação de física em engenharia. Nesse texto trataremos de três tópicos principais, primeiramente veremos campos, potencial e energia potencial, depois veremos o potencial de Lennard-Jones que é uma aplicação interessante do que vimos sobre energia potencial e para encerrar falaremos sobre teoremas de conservação do momento linear e angular, mas sem entrar em mérito da mecânica analítica.

O campo, o Potencial e a Energia Potencial

Muito falamos sobre campos, principalmente o gravitacional e o elétrico, mas como defini-los exatamente? Como sabemos a força elétrica entre duas cargas, q_1 e q_2, é dada por

$$\vec{F} = Kq_1q_2\frac{\vec{r}}{r^3} \tag{1}$$

e a força gravitacional entre duas partículas com massas m_1 e m_2, é;

$$\vec{F} = -Gm_1m_2\frac{\vec{r}}{r^3} \tag{2}$$

Já que nosso objetivo é compreender o que é o campo, vamos analisar a força nesse conceito. Podemos dizer que a carga q_1 situada em um ponto P produz uma "condição" em R de tal forma que quando colocamos a carga q_2 em R ela "sente" a força elétrica atuando sobre ela. Nesse caso chamaremos essa "condição" produzida por q_1 de $\vec{E}$, assim $\vec{F}$ é a resposta de q_2 a $\vec{E}$ e podemos escrever a força como:

$$\vec{F} = q_2\vec{E} \tag{3}$$

em que $\vec{E}$ é o vetor campo elétrico que é dado por $\vec{E} = kq_1\frac{\vec{r}}{r^3}$

É importante notar que podemos (e devemos!) ver essa situação sobre dois aspectos, o primeiro é que esse campo em questão é produzido por algo que pode ser uma carga ou uma massa, o segundo é que esse campo atua em algo (carga ou massa). Essa simples analise não deve ser subestimada, uma vez que a realidade pode ser bem complexa e ela se torna mais complexa de ser feita.

Para o caso gravitacional podemos fazer exatamente a mesma coisa, tanto que na descrição acima já generalizei para campos criados por cargas quanto por massas. Sendo assim, para a força gravitacional, temos;

$$\vec{F} = -Gm_1m_2\frac{\vec{r}}{r^3} \tag{4}$$

então

$$\vec{F} = m_2\vec{C} \tag{5}$$

em que $\vec{C}$ é o campo gravitacional produzido por m_1, $\vec{C} = -Gm_1\frac{\vec{r}}{r^3}$, que, assim como o campo elétrico, possui direção radial. O vetor $\vec{C}$ possui três componentes sendo cada uma delas uma função de (x, y, z), assim qualquer objeto que crie um campo estará criando um vetor $\vec{C}$.

A energia potencial é energia propriamente dita e está relacionada a um sistema de interação entre dois ou mais corpos. Podemos defini-la em termos da força gravitacional, uma vez que ela é conservativa:

$$U = -\int \vec{F} \cdot d\vec{s} = -m_2 \int \vec{C} \cdot d\vec{s} = \frac{Gm_1m_2}{r_{1,2}} \tag{6}$$

Podemos ver que no caso gravitacional temos a energia associada à interação entre as massas por meio do campo gravitacional criado por elas. O mesmo vale para o caso eletrostático, porém o campo é gerado por cargas elétricas.

Agora vamos nos atentar para uma coisa específica, a integral $\int \vec{C} \cdot d\vec{s}$ é o que chamamos de potencial, e podemos escrevê-lo da seguinte forma:

$$V = \frac{U}{m_2} = \int \vec{C} \cdot d\vec{s} = -G\frac{m_1}{r} \tag{7}$$

porém a energia e o potencial só podem ser calculados em relação a algum ponto, e obtemos apenas sua variação, mas muitas vezes escolhe convenientemente regiões onde o potencial inicial ou a energia inicial é zero, para desconsiderar constantes aditivas.

É evidente que uma variação na energia potencial é igual a menos o trabalho, como falamos anteriormente, $\Delta U = -W$, assim o potencial V pode ser escrito como:

$$V(r) = -\frac{W}{m_2} \tag{8}$$

Assim o potencial pode ser entendido como o trabalho para deslocar uma massa unitária de um ponto a outro do campo. Considerando que nenhum desses pontos esteja infinito, mas sim em A e B, temos:

$$V_A - V_B = \frac{W_{AB}}{m} \tag{9}$$

Assim vemos que podemos traduzir a definição do potencial citada acima como o potencial sendo o trabalho por unidade de massa, no caso do campo gravitacional. No caso do campo elétrico o potencial é o trabalho por unidade de carga.

Uma ultima coisa interessante sobre o potencial é a sua relação direta com o campo. Uma vez que a variação da energia potencial é;

$$\Delta U = W_{A\to B} = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{s} = m_2 \int_a^b \vec{C} \cdot d\vec{s} \tag{10}$$

então para o potencial temos:

$$V_a - Vb = \int_a^b \vec{C} \cdot d\vec{s} \tag{11}$$

assim temos a seguinte relação entre o campo elétrico e o potencial:

$$\vec{C} = -\nabla V \tag{12}$$

Ou seja, o campo é igual ao negativo de gradiente de um potencial escalar. Isso nos mostra que em regiões onde o potencial é constante o campo é nulo.

Aplicação interessante: O Potencial de Lennard-Jones.

Depois de tudo que vimos sobre energia potencial e potencial é hora de falarmos sobre uma aplicação interessante.

Em 1925 o físico J.E Lennard-Jones propõe uma função de energia potencial que inclui tanto forças atrativas quanto repulsivas entre dois átomos de uma molécula diatômica, por exemplo. Isso torna esse potencial particularmente interessante e de simples tratamento, podemos escrevê-lo da seguinte forma:

$$V_{L.S}(r) = 4\epsilon \left[\left(\frac{\sigma}{r}\right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{r}\right)^{6} \right] \tag{13}$$

em que ϵ e σ são constantes que podem ser ajustadas experimentalmente.

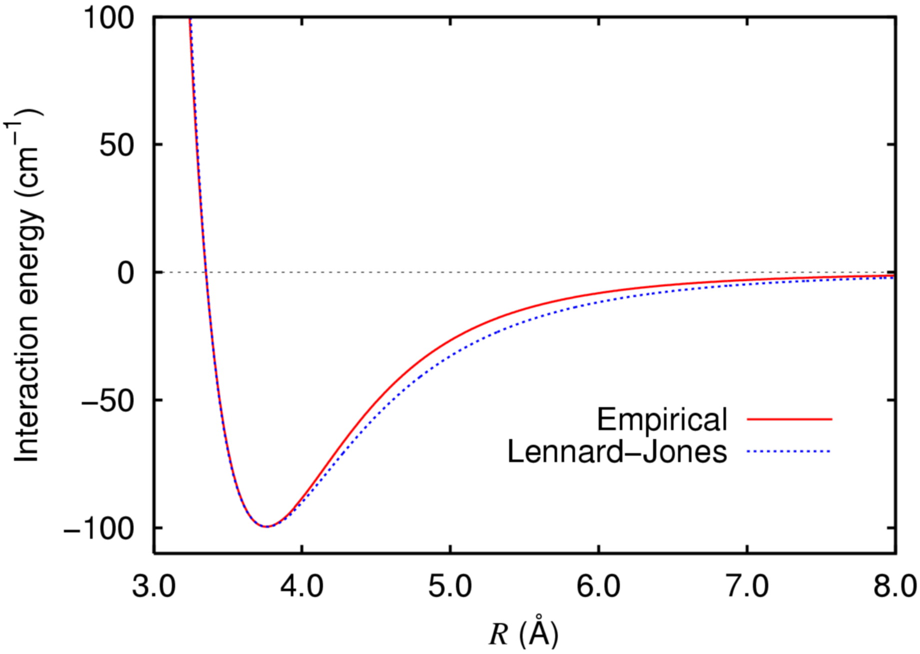

Figura 1: comparação do potencial L-J, experimental e teórico

A nossa primeira curiosidade nesse potencial é conhecer essas forças atrativas e repulsivas entre os dois átomos. Como vimos anteriormente à força se relaciona com o potencial da seguinte forma:

$F(r) = -\frac{dV}{dr}$ que também pode ser escrito em termos do gradiente: $F(r) = -\nabla V$. Realizando a derivada em r temos então a força:

$$F(r) = 4\epsilon\left[12\frac{\sigma^{12}}{r^{13}} - 6\frac{\sigma^6}{r^7}\right] \tag{14}$$

Agora temos uma curiosidade em particular, suponha que um dos átomos possua massa bem maior que a do outro átomo, e esse primeiro átomo permanece fixo enquanto o de menor massa oscila em torno de um ponto de equilíbrio entre eles, qual é esse ponto de equilíbrio e qual é a freqüência de vibração desse átomo de pequena massa?

Vimos anteriormente que o ponto de equilíbrio é o valor de r em que $F = dV/dr = 0$, e o período de oscilação é dado por:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} \tag{15}$$

em que $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$

Como o ponto de equilíbrio é aquele onde a força $F(r)$ é zero, temos:

$$F(r) = 4\epsilon\left[12\frac{\sigma^{12}}{r^{13}} - 6\frac{\sigma^6}{r^7}\right] = 0 \tag{16}$$

Agora brincamos um pouco com a álgebra e obtemos:

$$r = (2)^{1/6}\,\sigma \tag{17}$$

Esse é o nosso ponto de equilíbrio no qual o átomo de menor massa oscila. Como o movimento é uma oscilação podemos encontrar uma constante restauradora K a partir da derivada segunda do potencial:

$$\frac{d^2V}{dr^2} = 4\epsilon\left[156\frac{\sigma^{12}}{r^{14}} - 42\frac{\sigma^6}{r^8}\right] \equiv K \tag{18}$$

Uma vez que oscilação é em torno do ponto de equilíbrio, temos:

$$\frac{d^2V}{dr^2} = 4\epsilon\left[156\frac{\sigma^{12}}{\left(2^{1/6}\sigma\right)^{14}} - 42\frac{\sigma^6}{\left(2^{1/6}\sigma\right)^8}\right] \equiv K \tag{19}$$

assim temos;

$$K = 68\frac{\epsilon}{\sqrt[3]{2}\sigma^2} \tag{20}$$

Agora que temos K podemos facilmente encontrar a período:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}} \tag{21}$$

Substituindo o valor de K temos:

$$T = 2^{1/6}\pi\sigma\sqrt{\frac{m}{17\epsilon}} \tag{22}$$

Agora que vimos essa interessante aplicação vamos para nosso ultimo tópico.

Momento linear e angular: teoremas de conservação

Momento Linear

Como vimos na equação (1.8) do primeiro texto, se a força resultante sobre uma partícula com veloidade v for zero teremos:

$$\Delta p = 0 \tag{23}$$

assim:

$$p_f = p_i \tag{24}$$

Fica evidente que o momento linear se conserva caso a resultante das forças externas sobre a partícula seja nula, e esse é nosso enunciado da lei de conservação do momento linear.

Trabalhando vetorialmente é interessante ressaltar que o momento linear pode ser conservado em uma determinada direção e não ser conservado em outra. Ou seja, se em uma determinada direção fixa $\vec{s}$, tivermos $\vec{F}\hat{s} = 0$, então

$$\frac{d\vec{p}}{dt}\hat{s} = 0 \tag{25}$$

então

$$\vec{p}\hat{s} = cte \tag{26}$$

Podemos enunciar então: a componente do momento linear se conserva na direção fixa em que a componente da força é nula.

Momento Angular

O momento angular de uma partícula de massa m, com velocidade v e localizada instantaneamente na posição $\vec{r}$ medida em relação a uma origem O, é definida por:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \tag{27}$$

Como você já deve ter notado, o momento angular é um análogo rotacional do momento linear. Derivando o momento angular temos:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\left(\vec{r} \times \vec{p}\right)}{dt} \tag{28}$$

$$\dot{\vec{L}} = \dot{\vec{r}} \times \vec{p} + \vec{r} \times \dot{\vec{p}} \tag{29}$$

em que $\dot{\vec{r}} \times \vec{p} = \vec{v} \times (m\vec{v}) = 0$ uma vez que os vetores são paralelos, portanto:

$$\dot{\vec{L}} = \vec{r} \times \dot{\vec{p}} \tag{30}$$

Como $\dot{\vec{p}} = \vec{F}$, então

$$\dot{\vec{L}} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{N} \tag{31}$$

em que $\vec{N}$ é o torque em relação a mesma origem do momento angular, assim vemos que a variação temporal do momento angular de uma partícula é igual ao torque externo. Se o torque externo for igual a zero, $\vec{N} = 0$, o momento angular se conserva. Da mesma forma que o momento linear pode se conservar em uma direção fixa e não em outra, o momento angular também pode se conservar para uma direção fixa $\vec{s}$ na qual $\vec{N}\hat{s} = 0$;

$$\dot{\vec{L}}\hat{s} = 0 \tag{32}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{L}\hat{s}\right) = 0 \tag{33}$$

$$\vec{L}\hat{s} = cte \tag{34}$$

assim a componente do momento angular é conservada na direção em que a componente do torque é nula durante o movimento.

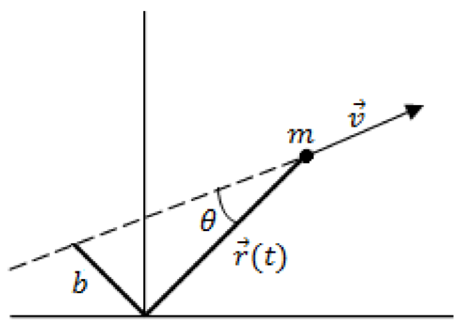

Figura 2: Partícula se movendo em MRU

Uma observação importante é que uma partícula pode ter momento angular em relação a uma origem, mesmo quando se translada em movimento retilíneo uniforme.

O momento angular em relação à origem, dado por $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$, é um vetor em $-\hat{k}$ de magnitude $L = mrvsen\theta$. Como a força resultante sobre a partícula é nula o torque também é nulo, o que mostra que o vetor momento angular é constante (em módulo e sentido), é fácil notar a constância do sentido, mas o da magnitude nem tanto. Observe que:

$$L = mrvsen\theta = mvrsen\theta \tag{35}$$

em que $rsen\theta$ é a distância de máxima aproximação da partícula á origem, que é representada na figura por a. Como essa distância é constante, o módulo de $\vec{L}$ também é constante, e com isso vemos a relação entre momento linear e angular em um movimento retilíneo.

Referências Bibliográficas

[1] Barcelos Neto. j: Mecânica Newtoniana, Lagrangiana e Hamiltoniana.

[2] Symons K.R: Mechanics vol 1

[3] Kazunori W.: Mecânica Clássica vol 1.

[4] Nussenzveig H.M: Física Básica Vol 1.

[5] Feynman R.P: Lectures on Physics Vol 1.

[6] Notas de Aula do Professor Canesin (UEM)

[7] Griffiths D. J.: Eletrodinâmica Vol.1