Tensores

Espaço vetorial. Um espaço vetorial V sobre um corpo K, é um conjunto, cujos elementos são chamados vetores, munido de duas operações, uma chamada de adição, definida por $+ : V \times V \to V$, e outra chamada de multiplicação por escalar, elementos de K, definida por $\cdot : K \times V \to V$, tal que as seguintes propriedades são satisfeitas:

1) $u + v = v + u, \; \forall u, v \in V$
2) $u + (v + w) = (u + v) + w, \; \forall u, v, w \in V$
3) $\exists 0_V \in V$ tal que $v + 0_V = v, \; \forall v \in V$
4) $\forall v \in V, \exists -v$ tal que $v + (-v) = 0_V$
5) $(\lambda_1 + \lambda_2) . v = \lambda_1 v + \lambda_2 v, \; \forall \lambda_1, \lambda_2 \in K; v \in V$
6) $1 . v = v, \; \forall v \in V, 1 \in K.$

Transformação linear. Uma transformação linear T é definida como homomorfismo entre dois espaços vetoriais V e W, $T : V \to W$, tal que:

$$T(v_1 + \lambda v_2) = Tv_1 + \lambda T v_2 \, , \; \forall v_1, v_2 \in V, \; \lambda \in K.$$

(V e W são K-espaços vetoriais, daqui em diante todo espaço vetorial será sobre K, a escolha de um corpo em particular só será feita quando necessário).

O conjunto das funções é um espaço vetorial através das seguintes definições:

$$(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$$

$$(\alpha f)(x) = \alpha[f(x)]$$

$\forall\ f, f_1, f_2 \in \mathcal{F}(x)$, $\alpha \in K$.

Em particular, existem funções que são lineares, ou seja, $f(x_1 + \lambda x_2) = f(x_1) + \lambda f(x_2)$, sendo portanto transformações lineares de um espaço V levando em K.
O conjunto de todas as funções lineares (às vezes cha-
madas funcionais lineares) forma um espaço vetorial,
o espaço de todas as funções lineares que levam vetores de um espaço V em escalares de K, tal conjunto é denotado por $\mathcal{L}(V, K)$.

Espaço dual. Seja V um K-espaço vetorial, denotaremos por V^* o espaço vetorial de todas as funções lineares $f: V \to K$, funcionais lineares de V, note que $V^* = \mathcal{L}(V, K)$. V^* é chamado de espaço dual de V.

Base dual. Suponha que V tem dimensão finita, escolhendo $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ como base de V. Seja $f_i \in V^*$ o funcional definido por

$$f_i(v_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

Note que

$$f_i\left(\sum \lambda_j v_j\right) = \lambda_i$$

Bidual. Seja V K-espaço vetorial arbitrário. Seja V^{**} tal que $V^{**} = (V^*)^*$; V^{**} é chamado de bidual de V.

$(V^*)^*$

$\psi : V^* \to K$

Definindo $V \xrightarrow{\psi} V^{**}$

$v \mapsto \varphi_v$, onde $\varphi_v : V^* \to K$ é definida por, se $f \in V^*$, $\varphi_v(f) = f(v)$

Note que $\psi(v_1 + v_2) = \varphi_{(v_1+v_2)}$, ψ é injetiva, i.e., $\ker(\psi) = \{0\}$. como ψ, ou seja V, como V é de dimensão finita, pelo teorema do núcleo e da imagem, ψ é isomorfismo canônico entre V e V^{**}.

Emparelhamento canônico entre V^* e V

$$V^* \times V \to K$$
$$(f, v) \mapsto \langle f, v\rangle = \varphi(v)$$

(Note que f e v estão em espaços diferentes, então $\langle f, v\rangle$ não é um produto interno! Ainda, nem sabemos o que é um produto interno pois tal nem foi definido ainda!)

A aplicação definida é bilinear,

$$\langle f_1 + \lambda f_2, v\rangle = (f_1 + \lambda f_2)(v) = f_1(v) + \lambda . f_2(v)$$

$$\langle f, v_1 + \lambda v_2\rangle = f(v_1 + \lambda v_2) = f(v_1) + \lambda . f(v_2)$$

Agora, vejamos o emparelhamento canônico entre V^{**} e V^*,

$$V^{**} \times V^* \to K$$
$$(w, f) \mapsto w(f)$$

Considere o isomorfismo canônico:

$$\psi : V \to V^{**}$$
$$v \mapsto \varphi_v \quad ; \quad \varphi_v : V^* \to K$$
$$f \mapsto f(v)$$

$$\langle \varphi_v, f\rangle = \varphi_v(f) = f(v) = \langle f, v\rangle$$

identificando $\underset{\in V^{**}}{\varphi_v} \leftrightarrow v^{\in V}$, $\langle v, f\rangle = \langle f, v\rangle$, o emparelhamento é simétrico.

Ex.: No caso da mecânica quântica, o emparelhamento é denotado por $\varphi(v) = \langle \varphi | v\rangle$, que é hermitiano,

$\langle \varphi | v\rangle = \overline{\langle v | \varphi\rangle}$, linear na primeira entrada e antilinear (ou sesquilinear) na segunda.

Produto interno. Um produto interno em um espaço ⑤
$\mathbb{R}$-vetorial, isto é, $\mathbb{R}$-espaço vetorial é uma forma bilinear simétrica definida por $\langle , \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$, satisfazendo:

1) $\langle v_1 + v_2, u \rangle = \langle v_1, u \rangle + \langle v_2, u \rangle$, $\forall v_1, v_2, u \in V$
2) $\langle \lambda u, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle, \forall, u, v \in V, \lambda \in \mathbb{R}$
3) $\langle v, u \rangle = \langle u, v \rangle$, $\forall u, v \in V$
4) $\langle v, v \rangle \geq 0$, $v \in V$, com $\langle v, v \rangle = 0 \iff v = 0$

(Ou seja um produto interno em V é uma forma bilinear simétrica, positivo-definida)

Norma. Podemos definir a norma de um vetor $v \in V$ como $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$

(Todas as normas em $\mathbb{R}^n$ são equivalentes)

Produto hermitiano. Seja V $\mathbb{C}$-espaço vetorial, um produto hermitiano é uma função $\langle , \rangle : V \times V \to \mathbb{C}$ tal que:

1) $\langle v_1 + v_2, u \rangle = \langle v_1, u \rangle + \langle v_2, u \rangle$
2) $\langle \lambda v, u \rangle = \lambda \langle v, u \rangle$
3) $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$
4) $\langle v, v \rangle \geq 0$, com $\langle v, v \rangle = 0 \iff v = 0$

(Note que, por abuso de notação, usamos o mesmo símbolo p/ o emparelhamento canônico entre um espaço e seu dual, p/ o produto interno e o produto hermitiano, apesar que fica evidente a distinção entre cada caso!)

Métrica riemanniana. Uma métrica riemanniana em A, $A \subset \mathbb{R}^n$ um aberto, é uma escolha de valores $g_{ij}(x) \in \mathbb{R}$, $1 \leq i,j \leq n$, ou seja, de uma matriz quadrada $M(x)$, tal que $g_{ij}(x)$ depende diferencialmente de $x \in A$, tais que, p/ cada $x \in A$, temos que $\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(x)\, dx_i\, dx_j = \langle M(x).dx_j\, dx \rangle$ é uma forma quadrática positivo definida nas variáveis $(dx_1, \dots, dx_n) \in \mathbb{R}^n$, p/ a norma de $\|dx\|_x$ temos,

$$\|dx\|_x = \|dx\|_{M,x} = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(x)\, dx_i dx_j}$$

P/ $M(x) = \mathbb{I}$, obtemos a métrica euclidiana do $\mathbb{R}^n$, definida por $\|dx\| = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} dx_i^2}$

Variedades

Em $\mathbb{R}^n$ um mapa ϕ de um aberto $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ p/ um aberto $\mathcal{O}' \subset \mathbb{R}^m$ é dito de classe C^r se as coordenadas $(x'^1, \dots, x'^m)$ do ponto imagem $\phi(p)$ em $\mathcal{O}'$ são r-vezes continuamente diferenciáveis, funções, das coordenadas $(x^1, \dots, x^n)$ de p em O. P/ C^r p/ todo $r \geq 0$, então ϕ é dito de classe C^∞. C^0 é um mapa contínuo.

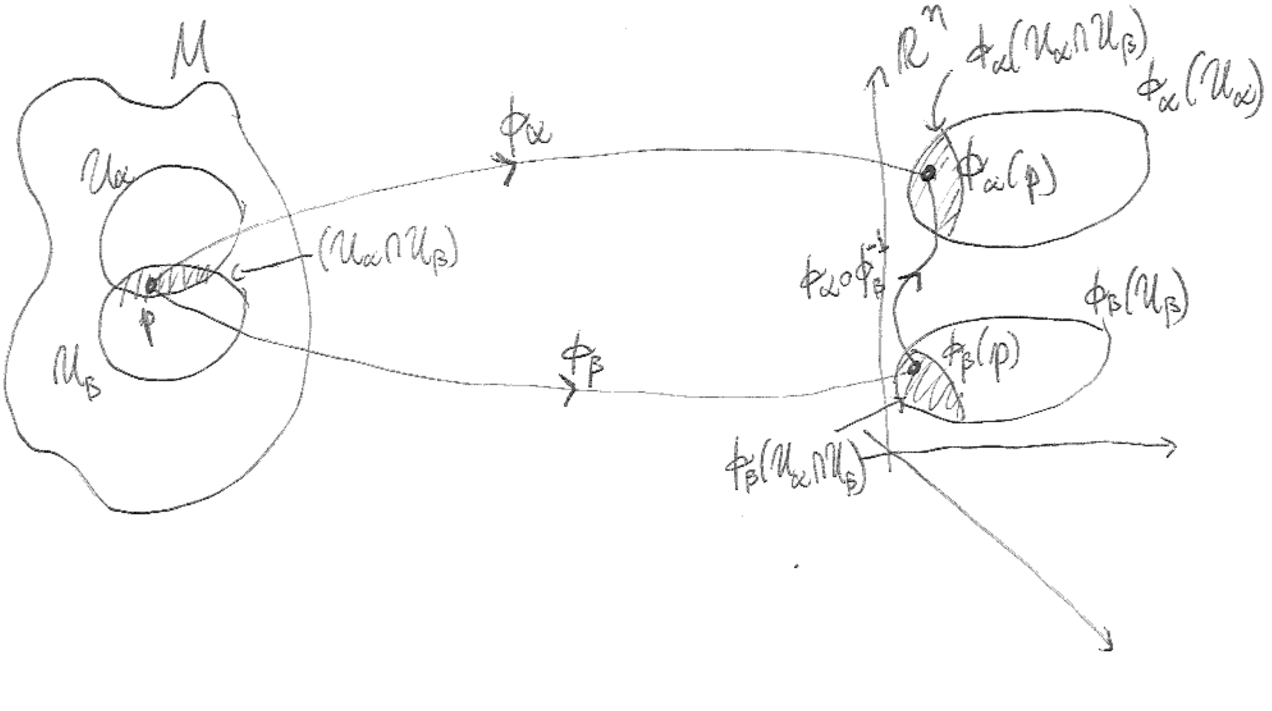
Uma C^r variedade n-dimensional M é um conjunto M munido com um atlas de classe C^r, $\{U_\alpha, \phi_\alpha\}$, isto é, uma coleção de cartas (U_α, ϕ_α) onde cada U_α é subconjunto de M e os ϕ_α são mapas um-a-um do U_α correspondente p/ conjuntos abertos em $\mathbb{R}^n$, tal que

1) Os U_α cobrem M, i.e., $M = \bigcup_\alpha U_\alpha$

2) Se $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, então o mapa

$$\cancel{\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1} : \phi_\beta(U_\beta}$$

$$\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1} : \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$$ é um mapa de classe C^r de um aberto de $\mathbb{R}^n$ p/ um aberto de $\mathbb{R}^n$.



Exemplos:

Seja φ o mapa do quadrado aberto $0<\theta<2\pi$, $0<\eta<2\pi$ em $\mathbb{R}^3$, φ é bijetivo, p/ $a>b>0$, definido por

$$\varphi(\theta,\eta)=\big((a+b\cos\eta)\cos\theta,\ (a+b\cos\eta)\,\text{sen}\,\theta,\ b\,\text{sen}\,\eta\big)$$

φ^{-1} é uma carta da porção do toro obtida retirando dois círculos ($\theta=0$ e $\eta=0$), $\left(\sqrt{x_1^2+x_2^2}-a\right)^2+x_3^2=b^2$.

Vetores e tensores (finalmente!)

Uma curva C^k $\lambda(t)$ em M é um mapa de classe C^k de um intervalo na reta "into" M. O vetor (contravariante) $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_\lambda\Big|_{t_0}$ tangente à curva $\lambda(t)$ de classe C^1 no ponto $\lambda(t_0)$ é o operador que mapeia cada função f de classe C^1 em $\lambda(t_0)$ "into" o número $\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_\lambda\Big|_{t_0}$; i.e., $\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_\lambda$ é a derivada de f na direção de $\lambda(t)$ com respeito ao parâmetro t.

Note que $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_\lambda t=1$.

Se $(x_1,\dots,x^n)$ são coordenadas locais em uma vizinhança de p,

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_\lambda\Big|_{t_0}=\sum_{j=1}^{n}\frac{dx^j(\lambda(t))}{dt}\Big|_{t=t_0}\cdot\frac{\partial f}{\partial x^j}\Big|_{\lambda(t_0)}=\frac{dx^j}{dt}\frac{\partial f}{\partial x^j}\Big|_{\lambda(t_0)}$$

Na última igualdade, e daqui por diante, foi adotada a convenção da soma, i.e.,

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b^i = a_i b^i \quad //$$

Pelo último resultado, temos que cada vetor tangente em um ponto p pode ser expresso como combinação linear das derivadas

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)\Big|_p, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)\Big|_p .$$

Reciprocamente, dada uma CL $V^j(\partial/\partial x^j)|_p$, onde os V^j são números, considere a curva $\lambda(t)$ definida por $x^j(\lambda(t)) = x^j(p) + tV^j$; o vetor tangente a esta curva em p será $V^j(\partial/\partial x^j)|_p$. Portanto, os vetores tangentes em p formam um espaço vetorial gerado por $(\partial/\partial x^j)|_p$, denotado por $T_p(M)$, onde $\dim M = \dim T_p(M)$.

Se $\{\hat{e}_a\}_{a=1}^{n}$ é um conjunto de vetores LI em p, então qualquer vetor $\vec{V} \in T_p(M)$ pode ser escrito $\vec{V} = V^a \hat{e}_a$. Em particular, escolhendo $\hat{e}_a$ sendo a base coordenada $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)\Big|_p$; então as componentes $V^i = V(x^i) = (dx^i/dt)|_p$ são as derivadas das funções coordenadas x^i na direção de $\vec{V}$.

Uma uma-forma (vetor covariante) $\vec{\omega}$ em p é um funcional linear a valores reais no espaço $T_p(M)$ dos vetores de p, isto é, em p. Se $\vec{X}$ é um vetor em p, temos que $\vec{\omega}(\vec{X}) = \langle \vec{\omega}, \vec{X} \rangle$ (produto interno ou emparelhamento canônico?) (10)

Sendo $\{\hat{e}^a\}_{a=1}^n$ uma base p/ o espaço das uma-formas, temos $\langle \hat{e}^a, \hat{e}_b \rangle = \delta^a_b$.

Temos $\vec{\omega} = \omega_i \hat{e}^i$, onde $\omega_i = \langle \vec{\omega}, \vec{e}_i \rangle$, então o conjunto de todas as um-formas em p formam um espaço vetorial n-dimensional em p, o espaço $T^*_p(M)$ dual a $T_p(M)$. A base $\{\hat{e}^a\}$ é dual à base $\{\hat{e}_a\}$, temos então,

$$\langle \vec{\omega}, \vec{X} \rangle = \langle \omega_i \hat{e}^i, X^j \hat{e}_j \rangle = \omega_i X^i, \quad \vec{\omega} \in T^*_p(M) \text{ e}$$

$\vec{X} \in T_p(M)$.

Cada função f em M define uma um-forma df em p pela regra: p/ cada $\vec{X}$, $\langle df, \vec{X} \rangle = Xf$,

$$\langle dx^i, \partial/\partial x^j \rangle = \frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \delta^i_j$$

$(dx^1, \dots, dx^n)$ formam a base das um-formas duais à base $(\partial/\partial x^1, \dots, \partial/\partial x^n)$ de vetores em p;

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$$

De $T_p(M)$ e $T_p^*(M)$, denotados daqui em diante por T_p e T_p^*, formamos por produto cartesiano

$$\Pi_r^s = \underbrace{T_p^* \times T_p^* \times \dots \times T_p^*}_{r \text{ fatores}} \times \underbrace{T_p \times \dots \times T_p}_{s \text{ fatores}},$$

onde Π_r^s é um tensor do tipo (r, s) em p, sendo uma função linear em cada argumento. Sendo T um tensor (r,s) em p, temos $T(\eta^1, \dots, \eta^r, Y_1, \dots, Y_s)$.

O espaço de todos os tensores acima é chamado produto tensorial $T_s^r(p) = \underbrace{T_p \otimes \dots \otimes T_p}_{r \text{ vezes}} \otimes \underbrace{T_p^* \otimes \dots \otimes T_p^*}_{s \text{ vezes}}$

Em particular, $T_0^1(p) = T_p$ e $T_1^0(p) = T_p^*$.

Seja $\vec{X}_i \in T_p$ $(i = 1, \dots, r)$ e $\vec{w}^j \in T_p^*$ $(j = 1, \dots, s)$, então $\vec{X}_1 \otimes \dots \otimes \vec{X}_r \otimes \vec{w}^1 \otimes \dots \vec{w}^s$ é o elemento de $T_s^r(p)$ que mapeia o elemento $(\eta^1, \dots, \eta^r, Y_1, \dots, Y_s)$ de Π_r^s "into"

$$\langle \eta^1, X_1 \rangle . \langle \eta^2, X_2 \rangle \dots \langle \eta^r, X_r \rangle \langle w^1, Y_1 \rangle \dots \langle w^s, Y_s \rangle$$